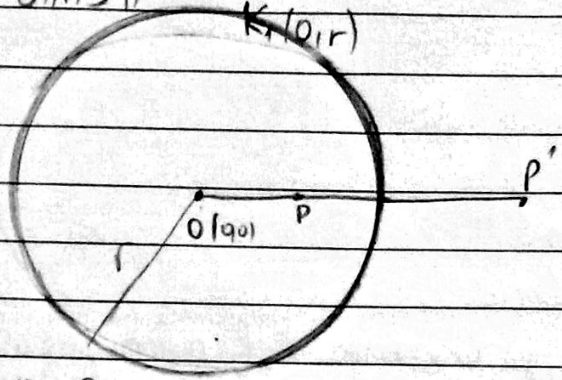
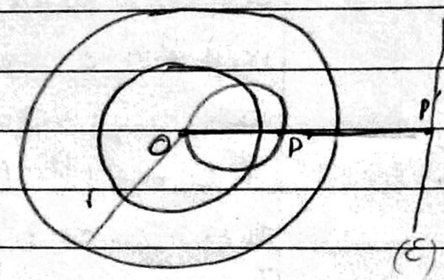
"Εκτός ύλης"





$|OP||OP'| = r^2$

$f(P) = P'$

$P' \neq O$

$P \in (\varepsilon)$

$\Rightarrow P' = f(P) \in f(\varepsilon)$

$P_n \to \infty$

$P_n \in \varepsilon$

$f(P_n) \in f(\varepsilon)$

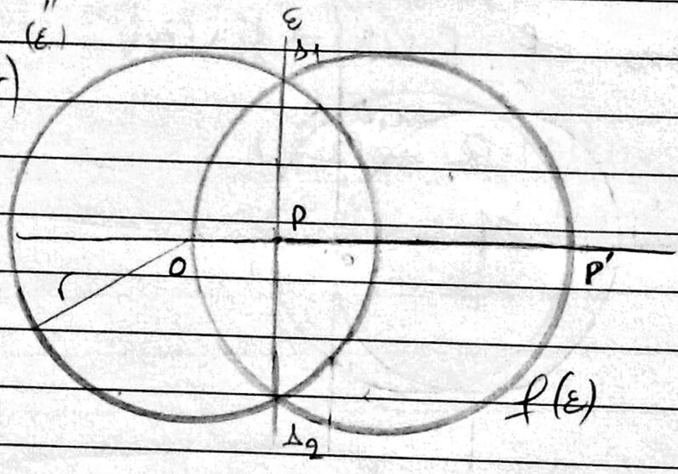
$\downarrow$

O

$f(\varepsilon) = K_1 \setminus \{O\}$

$f(f(\varepsilon)) = f(K_1 \setminus \{O\})$

(ε)



$P_n \in (\varepsilon),\ P_n \to \infty$

$f(P_n) \in f(\varepsilon)$

$\downarrow$

$O \in f(\varepsilon)$

$f(P) = P' \in f(\varepsilon)$

$O, P' \in f(\varepsilon),\ \Delta_1 \in K(O,r) \Rightarrow f(\Delta_1) = \Delta_1$

$\Delta_1 \in \varepsilon \Rightarrow f(\Delta_1) = \Delta_1 \in f(\varepsilon)$

O, P'

③ Αντιστροφές

① Ορισμός "Ομοιοθεσίας", $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως προς κέντρο $O(x_0, y_0)$ κ' λόγο $\lambda > 0$

$P'(x', y') = f(x,y) = f(P)$

$f(P) = P'$

$P' \in \vec{OP}: \vec{OP'} = \lambda \vec{OP}$

$(x' - x_0, y' - y_0) = \lambda(x - x_0, y - y_0)$

(x,y) P

$O(x_0, y_0)$

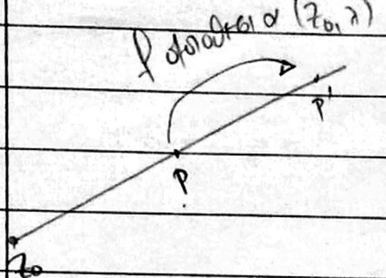
$x' = x_0 + \lambda(x - x_0)$

$y' = y_0 + \lambda(y - y_0)$ & $f(x,y) = (x_0, y_0) + \lambda(x - x_0, y - y_0)$

Για το $\mathbb{C}$:

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(x_0, y_0) $O \equiv z_0 = x_0 + iy_0$
(x, y) $P \leftrightarrow z = x + iy$
$(x - x_0, y - y_0) = z - z_0$
$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad O(z_0)$ $\quad , \lambda > 0$
$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0)$ ομοιοθεσία
Τότε η $f(z) = f_1 \circ f_2\,(z)$ για κατάλληλες f_1, f_2 αντιστροφές ως προς το ίδιο κέντρο κ' ακτίνες κατάλληλο r_1, r_2



$\overrightarrow{OP'} = \lambda \overrightarrow{OP}$ $\quad , f(P) = P'$

z_0, r_1: $\quad f_1 : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

z_0, r_2: $\quad f_2 : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

$f(z) = (f_1 \circ f_2)(z)$ $\qquad f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0)$

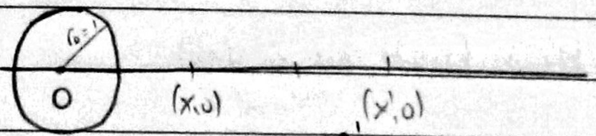
$$f_1(z) = z_0 + \frac{r_1^2}{\bar z - \bar z_0}$$

$$f_2(z) = z_0 + \frac{r_2^2}{\bar z - \bar z_0}$$

$$(f_1 \circ f_2)(z) = f_1\left(z_0 + \frac{r_2^2}{\bar z - \bar z_0}\right) = z_0 + \frac{r_1^2}{\bar w - \bar z_0} = z_0 + \frac{r_1^2}{\bar z_0 + \frac{r_2^2}{z - z_0} - \bar z_0} = z_0 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 (z - z_0)$$
$$= f(z)$$

Θα διαλέξουμε r_1, r_2: $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \lambda$

Πχ $(z_0, r_2 = 1)$: f_2 $\qquad 1 < \sqrt{\lambda} = r_1$
$(z_0, r_1^2 = \lambda)$: f_1 $\qquad \lambda > 1$



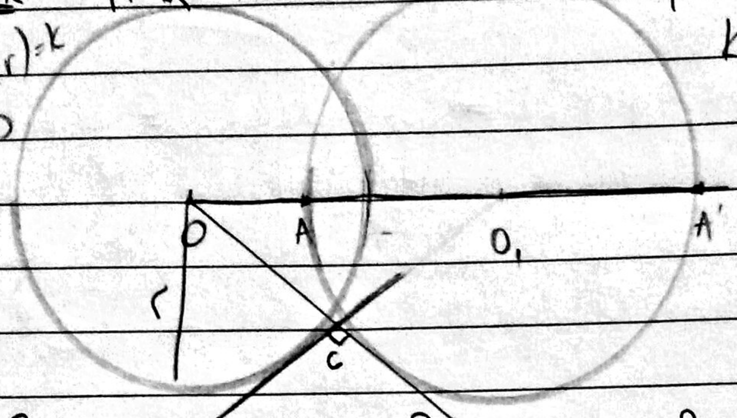
$f_2(x, 0)$ $P = (x', 0)$ P' $\qquad \underbrace{|OP'|}_{x'}\,|OP| = 1 \qquad x \cdot 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x}$
$f_1(f_2(x, 0)) = f_1\left(\frac{1}{x}, 0\right) = (x'', 0) = (\lambda x, 0)$
$x'' \frac{1}{x} = \lambda \Rightarrow x'' = \lambda x$

Πχ $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ αντιστροφή ως προς $k(O,r)$

$k(O,r)=k$ κύκλος αντιστροφής

$|OA'||OA|=r^2$

A εσωτερικό



Μας δίνεται κύκλος k_1 που διέρχεται από 2 αντίστοιχα (A,A') ως προς αντιστροφή με κύκλο $k(O,r) \to k_1 \perp k$

O ∈ εσωτερικό του k_1, αφού O, A, A' συνευθειακά $|OA||OA'|=r^2$

Άρα, αν OC εφαπτόμενη στον $k_1 \Rightarrow |OC|^2=|OA|\cdot|OA'|=r^2 \Rightarrow |OC|=r$
$\Rightarrow$ ~~κάθετη~~ OC ακτίνα $\Rightarrow k \perp k_1$

H/W Παρατήρηση / Άσκηση :

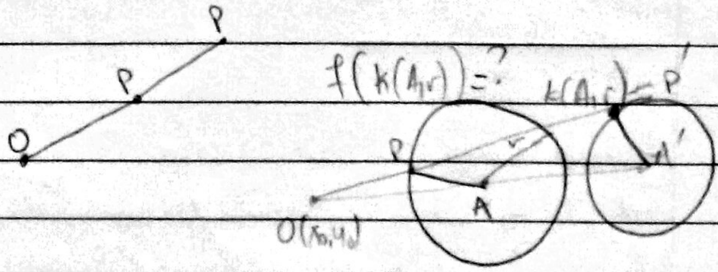
Με τα παραπάνω δείξαμε $f(k_1) \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} k_1$

Άσκηση 1)

$O(x_0,y_0)$ $f(P)=P'$

$\lambda>0$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ομοιοθ.



$f(k(A,r))=?$ $k(A',r')=P'$

$f(k(A,r))=k(A',r')$

$\frac{|OP'|}{|OP|}=\lambda=\frac{|OA'|}{|OA|} \xrightarrow{\text{Θαλής}} PA \parallel P'A'$ $\frac{|P'A'|}{|PA|}=\lambda \Rightarrow |P'A'|=\lambda r$

Δείξαμε ότι: $P' = f(P) \in K(A', r')$, $A' = f(A) \Rightarrow \boxed{r' = \lambda r}$

Άσκηση 2) $\underbrace{f(K(A,r))}_{P} \subseteq K(\underbrace{A'}_{f(A)}, \underbrace{r'}_{\lambda r}) \Rightarrow \underbrace{(g\circ f)}_{I_{\mathbb{R}}}\underbrace{(K(A,r))}_{K(A,r)} \subseteq \underbrace{g(K(A', r\lambda))}_{K(A,r)}$

$K(A,r) \subseteq K(A,r)$

Θεωρούμε g: ομοιοθεσία O λόγο $1/\lambda$, τ.ω. $f\circ g = I_{\mathbb{R}^2}$

$P' \in K(A', \lambda r) \Rightarrow \underbrace{g(P)}_{P'} \in K(A,r) \Rightarrow P' \in g^{-1}(K(A,r)) \Rightarrow P' \in f(K(A,r))$

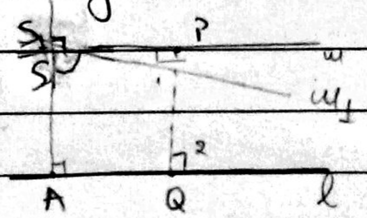
Θεώρημα: (Αντιστροφές) f αντιστροφή ως προς οποιονδήποτε κύκλο $K(O,r)$ τότε η f διατηρεί τις γωνίες μεταξύ ευθειών κ' κύκλων
(χωρίς απόδειξη)

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ • Απόλυτη Γεωμ. $\oplus$ A_1 αξίωμα
"υπερβολική γεωμ."

A_1) Υπάρχει ευθεία l κ' σημείο $P \notin l$, ώστε από το P να άγονται τουλάχιστον δύο διαφορετικές παράλληλες στην l.

Θεώρημα: Για κάθε ευθεία l και $P \notin l$. Υπάρχουν τουλάχιστον 2 παράλληλες της l που διέρχονται από το P

Απόδειξη



Έστω l τυχαία, $P \notin l$

Φέρνουμε τη κάθετη PQ κάθετα στην l $(PQ \perp l)$

Διαλέγουμε ένα $A \neq Q$, $A \in l$

Φέρνουμε κάθετη στην PQ στο σημείο P, έστω m
έστω l_1
$\Rightarrow (\hat{P}_1 = \hat{Q}_2)$ $m // l$ Φέρνουμε την κάθετη στο A

Από το P φέρνουμε μια ορθή από P στην l_1, άρα $\hat{S} \neq 1L$, διαφορετικά στο τετράπλευρο $AQPS$ θα είχαμε άθροισμα γωνιών $4L \Rightarrow$ θα είχαμε το αίτημα παραλλήλων του Ευκλείδη, απορρίπτεται αφού δεχόμαστε το A_1) αξίωμα

Φέρνουμε κάθετη ευθεία στην l_1 στο σημείο S_1

$\omega_1 = (PS_1)$ & $\hat{S}_1 = \hat{A} \Rightarrow \omega_1 \parallel \ell$

$\omega = (PS)$ $\quad \hat{P} = \hat{Q} \Rightarrow \omega \parallel \ell$

$\omega = \omega_1$

$\Rightarrow S = S_1 \Rightarrow \hat{S} = \hat{S}_1 \Rightarrow \hat{S} = 1L$

άτοπο, αφού $S \neq 1L$

$(\omega_{\rho\sigma\lambda\alpha} = 4L)$

Υπερβολική Γεωμετρία (αποδ. Θ A_1)

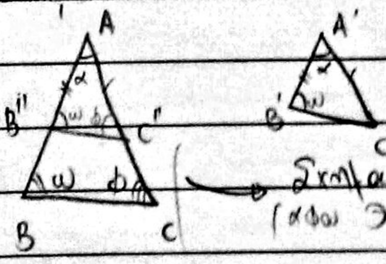
Θ1) Αν $\overset{\triangle}{ABC} \approx \overset{\triangle}{A'B'C'}$, δηλ. $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ $\Longrightarrow \overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$

Ας υποθέσουμε ότι $\overset{\triangle}{ABC} \neq \overset{\triangle}{A'B'C'}$, όπου $AB \neq A'B'$ (αφού αν $AB = A'B'$ τότε $\overset{\triangle}{ABC}$ & $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ ίσα)

$BC \neq B'C'$

$AC \neq A'C'$

Έστω τότε $AB > A'B'$ & $AC > A'C'$



τότε $\overset{\triangle}{AB''C''} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$

→ Σχηματικά η ίσον αναιρεί το αξίωμα A_1 (αφού ∃ τετράπλευρο, όπου το άθροισμα των = 4L, το $C''CBB''$ ⇒ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (αξίωμα Ευκλ.) άτοπο)